7-Operações com Subespaços

Laura Goulart

UESB

17 de Agosto de 2018

7.1 - Intersecção de Subespaços

Lembremos que $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ e $x \in B$.

Lembremos que $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ e $x \in B$.

Proposição (7.1)

Seja V um e.v.r. Se $W_1, W_2 \subset V$ são subespaços de V, então $W_1 \cap W_2$ também é um subespaço de V.

Lembremos que $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ e $x \in B$.

Proposição (7.1)

Seja V um e.v.r. Se $W_1, W_2 \subset V$ são subespaços de V, então $W_1 \cap W_2$ também é um subespaço de V.

Com a notação da proposição 7.1, podemos afirmar que $W_1 \cup W_2$ é um subespaço de V?

Exemplos

7.1) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\}$ e
$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 3y + z = 0\}$.

Exemplos

7.1) $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\}$ e
$W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - 3y + z = 0\}$.

7.2) $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$ e
$W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 3y = 0 \text{ e } z = 0\}$.

7.2 - Soma de Subespaços

Seja V um e.v.r. e considere $W_1, W_2 \subset V$ são subespaços de V. Definimos o conjunto abaixo dito soma de W_1 e W_2 :

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 / w_1 \in W_1 \text{ e } w_2 \in W_2\}.$$

7.2 - Soma de Subespaços

Seja V um e.v.r. e considere $W_1, W_2 \subset V$ são subespaços de V. Definimos o conjunto abaixo dito soma de W_1 e W_2 :

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 / w_1 \in W_1 \text{ e } w_2 \in W_2\}.$$

Proposição (7.2)

$W_1 + W_2$ é um subespaço de V.

Proposição (7.3)

Seja V um e.v.r. com $dimV = n < +\infty$. Considere $W_1 = [G_1]$ e $W_2 = [G_2]$ subespaços de V. Então:

i) $W_1 + W_2 = [G_1 \cup G_2]$.

ii) $dim(W_1 + W_2) = dimW_1 + dimW_2 - dim(W_1 \cap W_2)$.

Exemplos

7.3) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\}$ e
$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 3y + z = 0\}.$

Exemplos

7.3) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\}$ e
$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 3y + z = 0\}$.

7.4) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$ e
$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 3y = 0 \text{ e } z = 0\}$.

7.3 - Soma Direta

Seja V um e.v.r. e considere $W_1, W_2 \subset V$ são subespaços de V. Diremos que V é soma direta de W_1 e W_2 quando $V = W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ e denota-se por $V = W_1 \oplus W_2$.

7.3 - Soma Direta

Seja V um e.v.r. e considere $W_1, W_2 \subset V$ são subespaços de V. Diremos que V é soma direta de W_1 e W_2 quando $V = W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ e denota-se por $V = W_1 \oplus W_2$.
Dessa forma, conforme feito no exemplo 7.4 temos que $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^3$.

Proposição (7.4)

Seja V um e.v.r e considere $W_1, W_2 \subset V$ são subespaços de V. Então, $V = W_1 \oplus W_2$ sse cada vetor $v \in V$ admite uma única decomposição $v = w_1 + w_2$ com $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$.